مبرهنة نيمان بيرسون . السؤال : اذكر نص مبرهنة؟

إذا كان لدينا مجتمع إحصائياً موصوف بتوزيع احتمالي $f(x, \theta)$ حيث θ هو الوسيط المجهول لهذا المجتمع ، ولنأخذ عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها n عندئذٍ منطقة الرفض لاختبار الفرضية

$H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل

$H_1 : \theta = \theta_1$

عندئذٍ منطقة الرفض هي

$W_0 = \{x \in \Omega \; ; \; \frac{\ell_1}{\ell_0} \geq k\} \; ;$ k ثابتاً موجب

حيث α معلوم

ℓ_1 : دالة المعقولية أو دالة الاحتمالية تحت الفرضية H_1

ℓ_0 : 〃 〃 〃 〃 〃 H_0

تمرين :

نفرض لدينا مجتمع إحصائي طبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n حيث σ^2 معلومة عندئذٍ أوجد منطقة الرفض لاختبار الفرضية H_0

$H_0 : \mu = \mu_0$

مقابل $H_1 : \mu = \mu_1$

حيث α معلوم (مستوى الثقة - حجم الاختبار α معلوم)

الحل : نعرف :

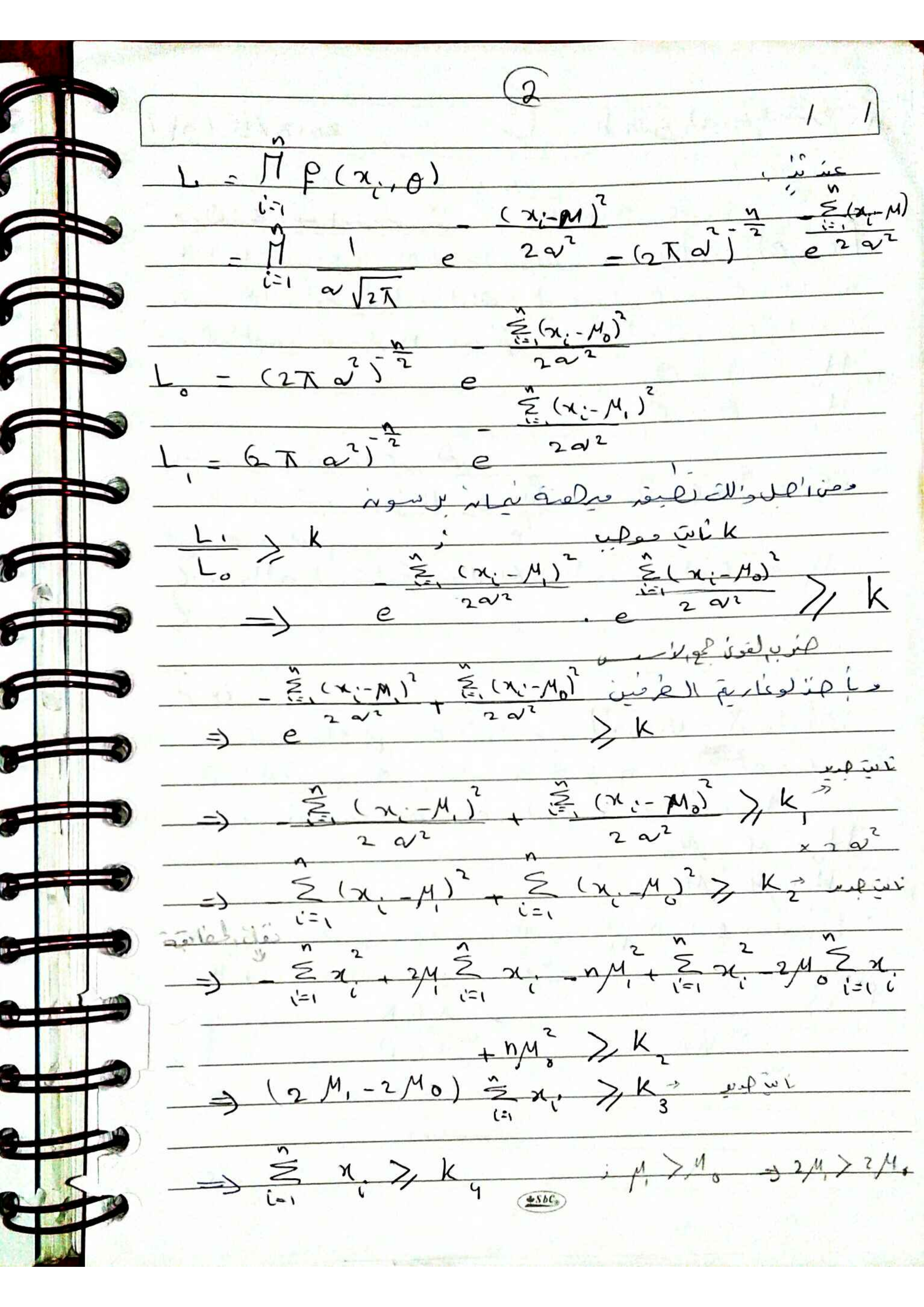
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$; لدينا

$x \in R$ (عدد حقيقي)

$\mu \in R$ (عدد حقيقي)

$0 < \sigma^2 < \infty$ (عدد حقيقي موجب)

عندئذٍ :



$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

عند نشر

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{2\sigma^2}}$$

$$L_0 = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L_1 = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}$$

ومن الحل والتطبيق مبرهنة نيمان بيرسون

$$\frac{L_1}{L_0} \geq k$$

k ثابت موجب

$$\Rightarrow e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \geq k$$

ضرب بالقوى نجمع الأسس

وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\Rightarrow e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \geq k$$

ثابت جديد

$$\Rightarrow -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2} \geq k_1$$

$\times 2\sigma^2$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 \geq k_2$$

ثابت جديد

نفك الطاقة

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_1^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 \geq k_2$$

$$\Rightarrow (2\mu_1 - 2\mu_0) \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_3$$

ثابت جديد

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_4$$

$; \mu_1 > \mu_0 \Rightarrow 2\mu_1 > 2\mu_0$

SbC

احتمال أي حدث = احتمال الحدث - الحدث المتمم (المقابل)

ولنقسم على n حجم العينة (فنستنتج $\bar{X}$)

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \lambda \Rightarrow \bar{X} \geq \lambda \Rightarrow W_0 = \{\bar{X} \geq \lambda\}$$

وهي منطقة الرفض أي نرفض H_0 إذا كان الوسط الحسابي لمتغيرات العينة أكبر أو يساوي الثابت λ يجب تعيينه

ولكن لدينا α معلومة ⇐

$$\alpha = P\{x \in W_0 / H_0\} \Rightarrow$$

$$\alpha = P\{\bar{x} \geq \lambda / H_0\} \Rightarrow$$

$$\alpha = P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\lambda - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} / H_0\right\} = P\left\{Z \geq \frac{\lambda - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{\lambda - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{\lambda - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha}$$

$$, Z \sim N(0,1) \Rightarrow P(Z < z_\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0$$

منطقة الرفض هي

$$\Rightarrow W_0 = \left\{\bar{x} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0\right\}$$

كل منها معلوم

⇐ نرفض H_0 عندما W_0 = المنطقة السابقة

$$\Rightarrow W_0 = \{\bar{X} \geq \lambda_0\}, \quad \lambda_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0$$

حيث λ_0 معلوم

$$\Rightarrow \overline{W_0} = \{\bar{X} < \lambda_0\}$$

/ /

$$\beta = P\{x \in \bar{W}_0 / H_1\}$$

$$\beta = P\{\bar{X} < \lambda_0 / H_1\}$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\lambda_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} / H_1 \right\}$$

$$= P\left\{ Z < \frac{\lambda_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right\} = F_Z\left(\frac{\lambda_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

حيث F تحسب من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$$\Rightarrow 1-\beta = 1 - F_Z\left(\frac{\lambda_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

تمرين:

نفرض لدينا مجتمع احصائي طبيعي مثلا $X \sim N(\mu, 1)$

ولنا عينة عشوائية حجمها $n = 9$ ، المطلوب

ايجاد منطقة الرفض للاختبار الفرضية

$H_0 : \mu = 4 = \mu_0$

مقابل $H_1 : \mu = 5 = \mu_1 \Rightarrow \mu_1 > \mu_0$

وذلك على مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ حيث $z_{0,95} = 1.65$

ثم عين منطقة القبول $\bar{W}_0$ ثم β , $1-\beta$

الحل:

حالة $\mu_1 > \mu_0$ حسب برهنة نيمان - بيرسون

$$W_0 = \{\bar{X} \geq \lambda\} = \{\bar{X} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0\}$$

$$= \{\bar{X} \geq \frac{1}{3}(1.65) + 4\} \Rightarrow W_0 = \{\bar{X} \geq 4,55\}$$

أي أننا نرفض H_0 عندما يكون الوسط الحسابي $\bar{X}$ أكبر من 4,55 أو يساوي 4,55

$\Rightarrow$ منطقة القبول هي $\bar{W}_0$

$$\bar{W}_0 = \{\bar{X} < 4,55\}$$

[illegible]

• للحصول على β

$$\beta = P\{X \in \bar{W}_0 / H_1\} = P\{\bar{X} < 4,55 / H_1\}$$

$$= P\left\{Z < \frac{4,55 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}}\right\} = P\left\{Z < \frac{4,55 - 5}{1/3}\right\}$$

$$= F_Z\left(\frac{4,55 - 5}{1/3}\right) = F(-1,35) = 1 - F(1,35)$$

نعوض من الجدول

$$= 1 - 0,91 = 0,09$$

$\Rightarrow$ قيمة قوة الاختبار $1 - \beta = 0,91$

• ملاحظة

$$\mu_1 > \mu_0 \Rightarrow W_0 = \{\bar{X} \geq \lambda\}$$

$$\mu_1 < \mu_0 \Rightarrow W_0 = \{\bar{X} < \lambda\}$$

$$\alpha = P\{\bar{X} < \lambda / H_0\}$$

مثال: متنوع

نفرض لدينا مجتمع إحصائي أسي وبمعلمة θ $f(x) = \theta e^{-\theta x}$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية له حيث

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0$$

$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

حيث $\theta > 0$ ثابت

ولنا عينة عشوائية حجمها n والمطلوب،

إيجاد منطقة الرفض $H_0 : \theta = \theta_0$

مقابل $H_1 : \theta = \theta_1$

وذلك بمستوى المعنوية α

الحل:

لنوجد أولاً منطقة الرفض

$$L_1 = \theta^n \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$L_0 = \theta_0^n \cdot e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$L_1 = \theta_1^n \cdot e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

والآن نطبق نظرية نيمان بيرسون

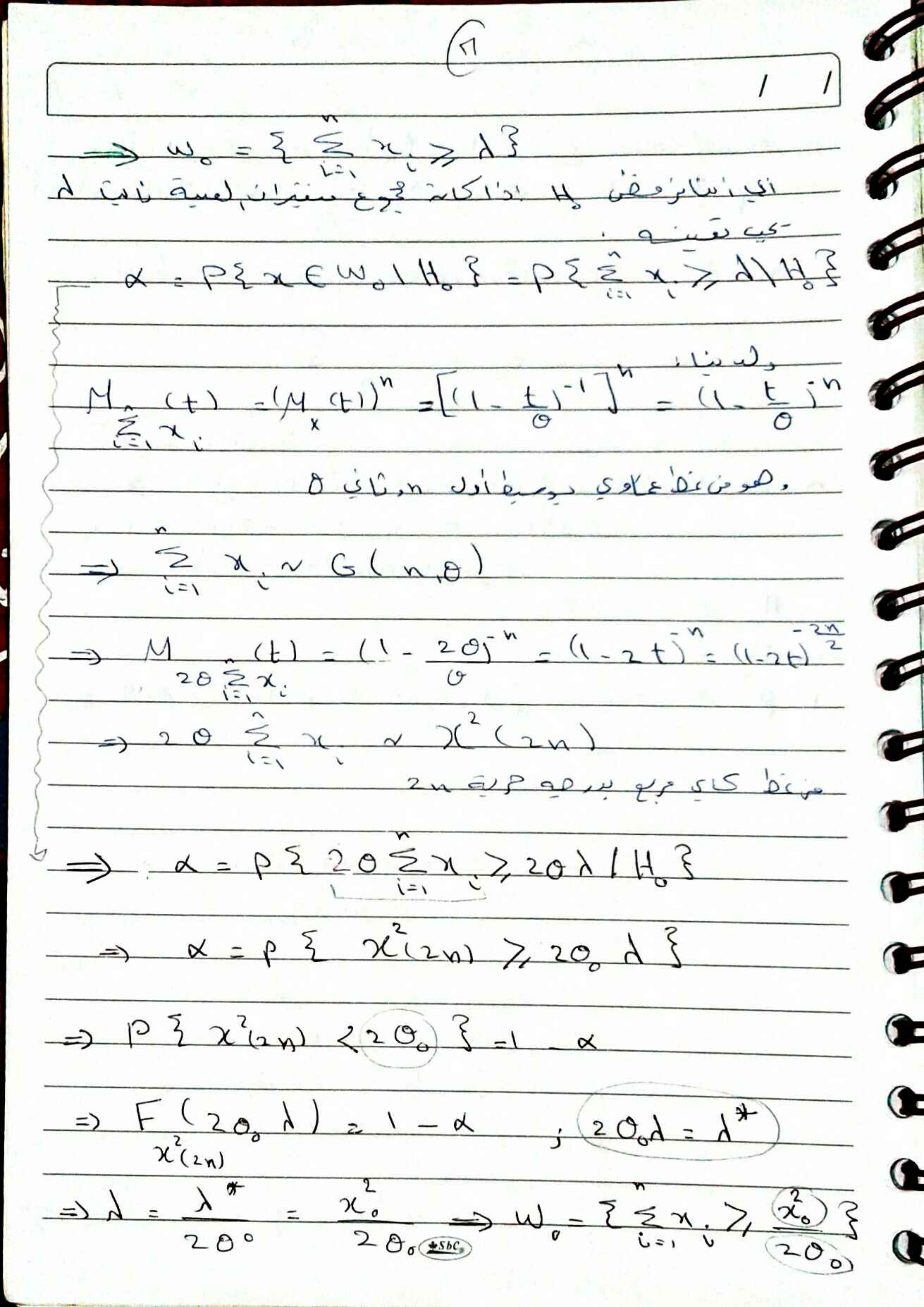
$$\frac{L_1}{L_0} \geq k \Rightarrow \frac{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum x_i}}{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum x_i}} \geq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i} \geq k \Rightarrow$$

بأخذ اللوغاريتم الطرفين ثم نرفعه

$$-\theta_1 \sum x_i + \theta_0 \sum x_i \geq k_2$$

$$\Rightarrow (\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_2 \xrightarrow{\theta_0 > \theta_1} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \lambda$$



/ /

$$\Rightarrow w_0 = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \lambda \}$$

أي إننا نرفض H_0 إذا كانت مجموع متغيرات العينة تأخذ λ حيث نعينه .

$$\alpha = P\{ x \in w_0 | H_0 \} = P\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \lambda | H_0 \}$$

ولدينا :

$$M_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = (M_x(t))^n = [(1 - \frac{t}{\theta})^{-1}]^n = (1 - \frac{t}{\theta})^{-n}$$

وهو من توزيع جاما وسيط أول n وثاني θ

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim G(n, \theta)$$

$$\Rightarrow M_{2\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = (1 - \frac{2\theta t}{\theta})^{-n} = (1 - 2t)^{-n} = (1-2t)^{-\frac{2n}{2}}$$

$$\Rightarrow 2\theta \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \chi^2(2n)$$

من توزيع كاي مربع بدرجة حرية 2n

$$\Rightarrow \alpha = P\{ 2\theta \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 2\theta\lambda | H_0 \}$$

$$\Rightarrow \alpha = P\{ \chi^2(2n) \geq 2\theta_0 \lambda \}$$

$$\Rightarrow P\{ \chi^2(2n) < 2\theta_0 \} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow F_{\chi^2(2n)}(2\theta_0 \lambda) = 1 - \alpha \quad ; \quad 2\theta_0 \lambda = \lambda^*$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\lambda^*}{2\theta^0} = \frac{\chi_0^2}{2\theta_0} \Rightarrow W_0 = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{\chi_0^2}{2\theta_0} \}$$

$\overset{?}{W_0} \Rightarrow \overset{?}{\overline{W_0}} \Rightarrow \overset{?}{\hat{\beta}} \Rightarrow \overset{?}{\hat{\beta}-1}$

8 / /

أي أننا نرفض الفرضية H_0 إذا كان مجموع متغيرات العينة أكبر أو يساوي لـ ثابت $\frac{x_0^2}{2\theta_0}$ حيث x_0^2 و $2\theta_0$ معلوم

ومن ثم نوجد $\overline{W_0}$ ومن ثم $\hat{\beta}$ ومن ثم $1-\hat{\beta}$

$$\overline{W_0} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{x_0^2}{2\theta_0} \right\}$$

تمرين:

مجتمع احصائي أسي بمعلمة θ حيث $\theta > 0$ ولتأخذ منه عينة عشوائية حجمها $n=4$ والمطلوب عين منطقة الرفض لاختبار فرضية

$H_0: \theta = \theta_0 = 3$

مقابل $H_1: \theta = \theta_1 = 2$

وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0{,}05$ ثم عين قوة الاختبار $1-\beta$

المحاضرة ...

الأخيرة

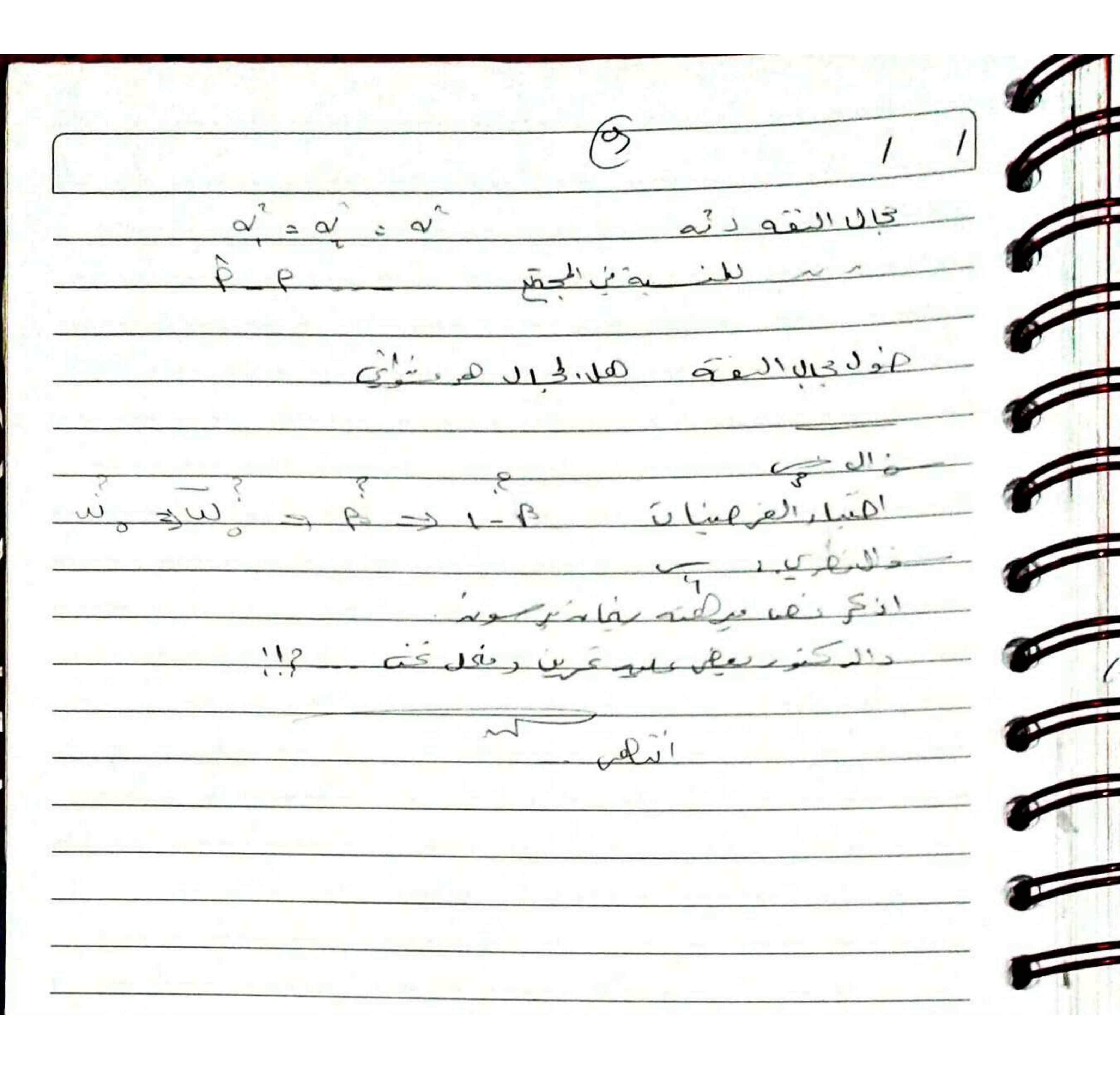
G_1

أوجد المقدر ... أصغر ...

هل هذا المقدر ...

هل المقدر ...

G_2 ... سؤال بالدالة ...


للنسبة في المجتمع
طول مجال الثقة
اختبار الفرضيات
انتهى